

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică *M\_mate-info***

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 1**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$a = 3 + 2\sqrt{2} + \frac{3 - 2\sqrt{2}}{9 - 8} =$ $= 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 6$ , care este număr natural	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.</b>	$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(3) = 7$ $f(2) = 5$ , deci $(f \circ f)(1) = f(2) + 2$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>3.</b>	$3^{2x^2} = 3^{x+1} \Leftrightarrow 2x^2 = x + 1$ $2x^2 - x - 1 = 0$ , de unde obținem $x = -\frac{1}{2}$ sau $x = 1$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>4.</b>	Numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $A$ este $C_n^2$ $\frac{n!}{2!(n-2)!} = 10 \Leftrightarrow n^2 - n - 20 = 0$ și, cum $n$ este număr natural, obținem $n = 5$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5.</b>	$AM = AN$ , deci $a = 4$ $A(4, 3)$ , deci $AO = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>6.</b>	$3\cos x - 2 = 4\cos^2 x - 2 \Leftrightarrow 4\cos^2 x - 3\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(4\cos x - 3) = 0$ Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , obținem $\cos x = \frac{3}{4}$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \end{vmatrix} =$ $= (-2) + 0 + 0 - 0 - (-5) - 0 = 3$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>b)</b>	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 2-a & a \\ a-1 & a-1 & 1-a \\ a & 2a-5 & a-2 \end{vmatrix} = (a-1) \begin{vmatrix} 1 & 2-a & a \\ 1 & 1 & -1 \\ a & 2a-5 & a-2 \end{vmatrix} = (a-1) \begin{vmatrix} 1 & 1-a & a+1 \\ 1 & 0 & 0 \\ a & a-5 & 2a-2 \end{vmatrix} =$ $= -(a-1) \begin{vmatrix} 1-a & a+1 \\ a-5 & 2a-2 \end{vmatrix} = (a-1)(3a^2 - 8a - 3) = (a-1)(a-3)(3a+1)$ , pentru orice număr real $a$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	Sistemul are soluție unică $(x_0, y_0, z_0) \Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0$ , deci, pentru $a \in \mathbb{N}$ , obținem $a \in \mathbb{N} \setminus \{1, 3\}$ și, cum $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{N}$ și $ax_0 + y_0 + z_0 = 2 - a$ , obținem $2 - a \in \mathbb{N}$ $a = 2$ , care nu convine, $a = 0$ care convine	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$0 * 0 = \log_2(2^0 + 2^0) = \log_2(1 + 1) =$ $= \log_2 2 = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>

<b>b)</b>	$x * y = \log_2(2^x + 2^y) = \log_2(2^y + 2^x) =$ $= y * x$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$ , deci legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$(x * x) * x = \log_2(2^x + 2^x) * x = \log_2(2^{x+1}) * x = (x+1) * x = \log_2(2^{x+1} + 2^x) = \log_2(2^x \cdot 3)$ , unde $x$ este număr real $\log_2(2^x \cdot 3) = 3 + \log_2 3$ , de unde obținem $x = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} =$ $= \frac{2x(2x^2 - 1)}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \frac{x(2x^2 - 1)}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$f(1) = 1, f'(1) = 1$ Ecuția tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ , adică $y = x$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x = 0$ sau $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ , $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$ , $f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ și pe $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ , $f$ este strict crescătoare pe $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ și pe $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ Cum $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{3}}{2} < m$ , $f(0) = 1 > m$ și $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{3}}{2} < m$ , obținem că, pentru orice $m \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ , ecuația $f(x) = m$ are exact patru soluții reale	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_1^2 x \cdot \frac{x^2 + 2x + 5}{x} dx = \int_1^2 (x^2 + 2x + 5) dx = \left( \frac{x^3}{3} + x^2 + 5x \right) \Big _1^2 =$ $= \frac{8}{3} + 4 + 10 - \frac{1}{3} - 1 - 5 = \frac{7}{3} + 8 = \frac{31}{3}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2 + 2x + 5)'}{x^2 + 2x + 5} dx =$ $= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 5) \Big _0^1 = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$x^{2n} \geq 0$ și $x^2 + 2x + 5 \geq 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^{2n}}{x^2 + 2x + 5} \leq \frac{x^{2n}}{4}$ , pentru orice $x \in [-1, 1]$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq \int_{-1}^1 x^{2n-1} f(x) dx \leq \int_{-1}^1 \frac{x^{2n}}{4} dx$ și, cum $\int_{-1}^1 \frac{x^{2n}}{4} dx = \frac{1}{2(2n+1)}$ și $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(2n+1)} = 0$ , obținem $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$	<b>2p</b> <b>3p</b>