

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ Cum $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$, obținem că $\log_2 16 < \sqrt[3]{125}$	2p 3p
2.	$\Delta = (a+2)^2 - 4(2a+1) = a^2 - 4a$, unde a este număr real Graficul funcției f este tangent axei $Ox \Leftrightarrow \Delta = 0$, deci $a = 0$ sau $a = 4$	2p 3p
3.	$x^2 - x - 2 = 3x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ $x = 1$ sau $x = 3$	3p 2p
4.	$C_4^1 = 4$, $A_4^2 = 12$ și $A_5^2 = 20$ $12 = \frac{4+20}{2}$, deci C_4^1 , A_4^2 și A_5^2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	3p 2p
5.	$m_{AB} = \frac{a-1}{2}$, $m_{BC} = \frac{a+1}{3}$, unde a este număr real A , B și C sunt coliniare $\Rightarrow m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow 3a - 3 = 2a + 2$, deci $a = 5$	2p 3p
6.	$\sin P = \frac{1}{2}$ $2R = \frac{MN}{\sin P} \Rightarrow R = 16$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= -1 + 1 + (-1) - 1 - 1 - 1 = -4$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = -a(a^2 + 3)$, pentru orice număr real a Matricea $A(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0$, deci $a \in \mathbb{R}^*$	2p 3p
c)	Dacă (x_0, y_0, z_0) este soluție și $x_0 = y_0 = z_0$, atunci $\begin{cases} x_0 + ax_0 - x_0 = a \\ x_0 - x_0 - ax_0 = -1, \text{ unde } a \text{ este număr} \\ ax_0 - x_0 + x_0 = -1 \end{cases}$ real Obținem $ax_0 = 1$ și $ax_0 = -1$, ceea ce este imposibil	2p 3p
2.a)	$2020 * (-2020) = \sqrt[3]{2020^3 + (-2020)^3 + 8} = \sqrt[3]{2020^3 - 2020^3 + 8} =$ $= \sqrt[3]{8} = 2$	3p 2p
b)	$x * e = x$, pentru orice număr real x , deci $\sqrt[3]{x^3 + e^3 + 8} = x \Leftrightarrow x^3 + e^3 + 8 = x^3 \Leftrightarrow e = -2$ Cum $(-2) * x = \sqrt[3]{(-2)^3 + x^3 + 8} = \sqrt[3]{x^3} = x$, pentru orice număr real x , obținem că $e = -2$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	3p 2p

c)	$f(x * y) = (x * y)^3 + 8 = \left(\sqrt[3]{x^3 + y^3 + 8}\right)^3 + 8 = x^3 + y^3 + 8 + 8 =$	2p
	$= x^3 + 8 + y^3 + 8 = f(x) + f(y), \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y, \text{ deci } f \text{ este morfism de}$ <p>la grupul $(\mathbb{R}, *)$ la grupul $(\mathbb{R}, +)$</p>	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+2} + \frac{x}{x+4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{2}{x}} + \frac{1}{1+\frac{4}{x}} \right) =$	3p
	$= 1 + 1 = 2$	2p
b)	$f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+4)^2}, \quad x \in (-2, +\infty)$	3p
	$f'(x) < 0, \text{ pentru orice } x \in (-2, +\infty), \text{ deci } f \text{ este descrescătoare pe } (-2, +\infty)$	2p
c)	$f \text{ este continuă, } f \text{ este descrescătoare pe } [-1, +\infty), f(-1) = \frac{4}{3} \text{ și } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \text{ deci}$	3p
	$f(x) \in \left(0, \frac{4}{3}\right], \text{ pentru orice } x \in [-1, +\infty)$ <p>$f(x) \in \mathbb{Z}, \text{ deci } f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \text{ și, cum } x \in [-1, +\infty), \text{ obținem } x = -2 + \sqrt{2}$</p>	2p
2.a)	$\int_0^2 \frac{x+1}{f(x)} dx = \int_0^2 e^x dx = e^x \Big _0^2 =$	3p
	$= e^2 - e^0 = e^2 - 1$	2p
b)	$\int_0^1 e^{3x} f^2(x) dx = \int_0^1 (x+1)^2 e^x dx = (x^2 + 1)e^x \Big _0^1 =$	3p
	$= 2e - e^0 = 2e - 1$	2p
c)	$\frac{f(x)}{x+1} = e^{-x}, \quad x \in (0, +\infty) \Rightarrow 1 - \int_0^a \frac{f(x)}{x+1} dx = e^{-a}, \quad 1 - \int_0^b \frac{f(x)}{x+1} dx = e^{-b}, \quad 1 - \int_0^c \frac{f(x)}{x+1} dx = e^{-c}$	3p
	$e^{-a}, e^{-b} \text{ și } e^{-c} \text{ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice} \Leftrightarrow (e^{-b})^2 = e^{-a} \cdot e^{-c},$ <p>deci $e^{-2b} = e^{-a-c}$, de unde obținem $2b = a + c$, adică a, b și c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice</p>	2p