

Test de evaluare inițială

Clasa a XII-a

Matematică

Mate Info, Științe ale naturii

Anul școlar 2021 – 2022

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.**

(1p) 1) Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = I_3 + A$.

(0,5p) a) Arătați că $A^2 = 10A$.

(0,5p) b) Demonstrați că matricea B este inversabilă și inversa ei este matricea $C = I_3 - \frac{1}{11}A$.

(1,5p) 2) În reperul cartezian xOy se consider punctele $A(2; 1), B(1; 2)$ și $C_n(n, -n)$ cu $n \in \mathbb{Z}$.

(0,5p) a) Să se scrie ecuația dreptei C_4C_2 .

(0,5p) b) Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}^*$ punctele O, C_n, C_{n+1} , sunt coliniare.

(0,5p) c) Să se calculeze aria triunghiului ABC_3 .

(1,5p) 3) Pentru $p, q, r \in \mathbb{C}$, se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + py + p^2z = p^3 \\ x + qy + q^2z = q^3 \\ x + ry + r^2z = r^3 \end{cases}$$

(0,5p) a) Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta = (p - q)(q - r)(r - p)$.

(0,5p) b) Dacă p, q, r sunt distincte, să se rezolve sistemul.

(0,5p) c) Să se arăte că, dacă sistemul are soluția $(-1, 1, 1)$, atunci cel puțin două dintre numerele p, q, r sunt egale.

(2,5p) 4) Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} - \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)(x - 2)$ și $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

(0,75p) a) Să se arate ca $g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$.

(0,75p) b) Să se demonstreze că funcția g este descrescătoare pe $(-\infty; 1)$.

(1p) c) Să se arate că $(f'(x))^2 \geq f(x) \cdot f''(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} - \{1; 2\}$.

(2,5p) 5) Se consider funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1}, & x \leq 0 \\ -2x + 1, & x > 0 \end{cases}$.

(0,75p) a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.

(0,75p) b) Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$.

(1p) c) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.